

## Topologia

### Lista 4

**Zad 1.** Sprawdzić które z podanych podzbiorów płaszczyzny euklidesowej, tj. pary  $(\mathbb{R}^2, d)$ , gdzie  $d$  jest metryką euklidesową, są otwarte:

$$A = \{(x, y) : a < x < b\}; \quad B = \{p\}, \quad C = \{tp + (t-1)q : t \in (0, 1)\}; p, q \in \mathbb{R}^2,$$

$$D = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\}, \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n, \quad \text{gdzie } E_n = \{(x, y) : n < x^2 + y^2 < n + 1\}.$$

**Zad 2.** Pokazać na przykładzie, że iloczyn nieskończonej ilości zbiorów otwartych nie musi być zbiorem otwartym.

**Zad 3.** Czy topologię można zadać na dowolnym zbiorze?

**Zad 4.** Opisać topologię wyznaczoną przez metrykę dyskretną.

**Zad 5.** Które z podanych rodzin stanowią topologię na zbiorze  $X = \{a, b, c\}$ :

a)  $\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ ,

c)  $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ ,

b)  $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ ,

d)  $\{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$ .

**Zad 6.** Podać przykład przestrzeni topologicznej niemetryzowalnej.

**Zad 7.** Wyznaczyć wnętrze, domknięcie, brzeg oraz pochodną danego podzbioru prostej euklidesowej  $\mathbb{R}$ :

$$A = (0, 3], \quad B = (-\infty, 5], \quad C = (1, 2) \setminus \mathbb{Q},$$

$$D = \left\{ x = (-1)^n \left( 1 + \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{x : |x| > 2\},$$

$$E = \left\{ x = 2^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{x : |x - 4| < 1\},$$

$$F = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup ([1, 2] \cap \mathbb{Q}).$$

Czy któryś z podanych zbiorów jest brzegowy lub gęsty?

**Zad 8.** Na płaszczyźnie euklidesowej  $\mathbb{R}^2$  wyznaczyć wnętrze, domknięcie, brzeg oraz pochodną zbioru

$$A = [0, 1] \times [0, 1], \quad B = \left\{ \left( \frac{1}{n}, (-1)^n \right) : n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$C = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\}, \quad D = \{(x, y) : y = \sin \frac{1}{x}, x > 0\},$$

$$E = \left\{ (x, y) : y = \frac{1}{n}x, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad F = \left\{ (x, y) : y^2 + x^2 = \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$G = \{(x, y) : y = qx, q \in \mathbb{Q}\}, \quad H = \{(x, y) : x \in [1, 2] \cap \mathbb{Q}, y \in (1, 2) \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Czy któryś z powyższych zbiorów jest gęsty lub brzegowy?

**Zad 9.** Wyznaczyć wnętrze, domknięcie, brzeg oraz pochodną podzbioru

$$A = (\text{Głowa} \setminus (\text{Oczy} \cup \text{Usta})) \cup \{(2, 4), (4, 4)\}$$

płaszczyzny euklidesowej  $(\mathbb{R}^2, d)$  ( $d$  jest metryką euklidesową), gdzie

$$\text{Głowa} = \{(x, y) : d((x, y), (3, 3)) \leq 3\}, \quad \text{Usta} = \left\{ \left( 2 + \frac{k}{4}, 2 \right) : k = 0, \dots, 8 \right\},$$

$$\text{Oczy} = \left\{ (x, y) : d((x, y), (2, 4)) \leq \frac{1}{2} \text{ lub } d((x, y), (4, 4)) \leq \frac{1}{2} \right\}.$$